https://doi.org/10.31891/2307-5740-2026-354-20
УДК 65.012.8
JEL classification: D81, M21, L21

ЄПІФАНОВА Ірина
Вінницький національний технічний університет
https://orcid.org/ : 0000-0002-0391-9026
e-mail: yepifanova@vntu.edu.ua
ШЕВЧУК Євген
Вінницький національний технічний університет
https://orcid.org/ 0009-0006-0879-0942

ОПТИМІЗАЦІЙНА МОДЕЛЬ РОЗПОДІЛУ ФІНАНСОВИХ РЕСУРСІВ З УРАХУВАННЯМ РИЗИКІВ

У статті розроблено оптимізаційну модель розподілу фінансових ресурсів підприємства між інвестиційними активами з урахуванням ризику. На основі теорії Марковіца та сучасних метрик ризику VaR і CVaR сформовано задачу оптимізації структури інвестиційного портфеля. Визначено оптимальну структуру розподілу для числового прикладу з п'яти класів активів. Проведено стрес-тестування та аналіз чутливості отриманого розв'язку до ключових параметрів моделі.

Ключові слова: оптимізація портфеля, розподіл фінансових ресурсів, ризик, VaR, CVaR, ефективна межа Марковіца, коефіцієнт Шарпа.

YEPIFANOVA Iryna, SHEVCHUK Yevhen
Vinnytsia National Technical University

OPTIMIZATION MODEL FOR THE ALLOCATION OF FINANCIAL RESOURCES WITH RISK CONSIDERATION

The article proposes an optimization model for the allocation of enterprise financial resources among investment assets under conditions of uncertainty and market risk. The relevance of the study is determined by the growing volatility of financial markets and the necessity for enterprises to ensure an effective balance between profitability and risk when managing free capital. Traditional intuitive approaches to capital allocation often lead either to excessive exposure to financial losses or to inefficient use of investment opportunities. Therefore, the study focuses on the development of a formalized quantitative approach that allows enterprises to optimize investment decisions using modern portfolio management methods.

The research is based on the classical Markowitz portfolio theory, according to which portfolio risk depends not only on the volatility of individual assets but also on the correlation structure between them. The optimization problem is formulated as a quadratic programming task aimed at minimizing portfolio variance while maintaining a target level of expected return and ensuring full allocation of available financial resources. To improve the adequacy of risk assessment under crisis conditions, the model is supplemented with modern coherent risk measures, namely Value-at-Risk (VaR) and Conditional Value-at-Risk (CVaR). Unlike variance, CVaR enables the evaluation of expected losses in the worst market scenarios and therefore provides a more realistic assessment of downside risk.

A numerical example involving five classes of investment assets, including bonds, stocks, real estate, futures, and commodities, is used to demonstrate the practical application of the proposed model. The optimal portfolio structure is determined by maximizing the Sharpe ratio, which reflects the relationship between excess return and portfolio volatility. The obtained results indicate that the largest share of resources should be allocated to low-risk instruments, while highly volatile assets should occupy smaller positions despite their potentially higher profitability.

The study also includes stress testing and sensitivity analysis of the optimized portfolio. Several crisis scenarios of different severity are modeled to evaluate portfolio stability under adverse market conditions. The results confirm that the optimized portfolio demonstrates higher resilience compared to an equally weighted benchmark portfolio. Sensitivity analysis reveals that market volatility and correlation between assets are the most influential parameters affecting portfolio efficiency.

The proposed optimization model can be applied by enterprises for strategic financial planning and investment decision-making under uncertainty. The practical value of the research lies in the possibility of improving financial stability, reducing tail risks, and increasing the efficiency of capital allocation in turbulent market environments.

Keywords: portfolio optimization, allocation of financial resources, risk, VaR, CVaR, Markowitz efficient frontier, Sharpe ratio.

Стаття надійшла до редакції / Received 01.04.2026
Прийнята до друку / Accepted 23.04.2026
Опубліковано / Published 28.05.2026

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons CC-BY 4.0

© ЄПІФАНОВА Ірина, ШЕВЧУК Євген

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ У ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ ТА ЇЇ ЗВ'ЯЗОК ІЗ ВАЖЛИВИМИ НАУКОВИМИ ЧИ ПРАКТИЧНИМИ ЗАВДАННЯМИ

Раціональний розподіл фінансових ресурсів між інвестиційними активами є одним із ключових завдань фінансового управління підприємством. В умовах ринкової невизначеності керівництво підприємства постійно стикається з необхідністю приймати рішення щодо напрямків вкладення вільних коштів: банківські депозити, цінні папери, нерухомість, похідні фінансові інструменти тощо. Кожен із цих активів характеризується власним рівнем очікуваної дохідності та ризику.

Помилковий або інтуїтивний розподіл капіталу без урахування взаємозв'язків між активами призводить або до надмірного ризику втрат, або до недоотримання доходу. Обидва варіанти негативно впливають на фінансову стійкість та конкурентоспроможність організації. Вирішення цього завдання потребує формалізованих кількісних методів, що дозволяють явно враховувати ризик при прийнятті інвестиційних рішень.

Класична теорія портфельних інвестицій, закладена Г. Марковіцем у 1952 році [1], вперше запропонувала математичний апарат для опису компромісу між очікуваною дохідністю та ризиком інвестиційного портфеля. Центральна ідея теорії полягає в тому, що ризик портфеля залежить не лише від ризику окремих активів, а й від кореляцій між їхніми дохідностями. Диверсифікація – включення до портфеля активів з низькою взаємною кореляцією – дозволяє знизити загальний ризик без зменшення очікуваної дохідності.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Серед дослідників, які досліджують питання оптимального розподілу інвестицій, врахуванні ризику при інвестуванні, можна виділити наступних Markowitz H. [1], Li J., Xu M. [2], Bodnar T., Parolya N., Schmid W. [3], Bauder D., Bodnar T., Schmid W. [4], Ferreira F.G., Cardoso R.T. [5], Zhang Y., Liu H., Wang X. [6] та інші.

ВИДІЛЕННЯ НЕВИРІШЕНИХ РАНІШЕ ЧАСТИН ЗАГАЛЬНОЇ ПРОБЛЕМИ, КОТРИМ ПРИСВЯЧУЄТЬСЯ СТАТТЯ

Проте класична модель Марковіца [1] використовує дисперсію дохідності як єдину міру ризику. Дисперсія симетрично штрафує як від'ємні, так і додатні відхилення від очікуваного значення, що суперечить економічній природі ризику: інвестора турбують лише збитки, а не надприбутки. Крім того, дисперсія погано описує поведінку портфеля в кризових умовах, коли розподіли дохідностей мають важкі хвости. Для подолання цих обмежень сучасні дослідники застосовують когерентні міри ризику – VaR та CVaR [2, 3, 6].

ФОРМУЛЮВАННЯ ЦІЛЕЙ СТАТТІ

Мета статті – побудова та аналіз оптимізаційної моделі розподілу фінансових ресурсів підприємства, що поєднує теорію Марковіца з метриками ризику VaR і CVaR, та практична перевірка її ефективності на числовому прикладі з п'яти класів активів.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянемо підприємство, що розподіляє вільний капітал між n інвестиційними активами. Кожен актив характеризується випадковою дохідністю – величиною, що змінюється залежно від стану ринку. Для математичного опису портфеля введемо такі позначення: $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)T$ – вектор часток активів, де w_i означає частку капіталу, вкладену в i-й актив; $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)T$ – вектор очікуваних дохідностей активів; Σ – коваріаційна матриця дохідностей розмірності n × n, елемент σ_{ij} якої відображає ступінь спільного коливання дохідностей активів i та j.

Очікувана дохідність та ризик (дисперсія) портфеля як функції вектора часток w визначаються відповідно як:

$$E(Rp) = wT \cdot \mu, \qquad \sigma^2 p = wT \cdot \Sigma \cdot w \tag{1}$$

де E(Rp) – математичне сподівання дохідності портфеля, тобто середньозважена дохідність активів з вагами wi;
σ²p – дисперсія дохідності портфеля, що є кількісною мірою його ризику;
wT – транспонований вектор часток активів (рядок-вектор);
μ – вектор очікуваних дохідностей окремих активів;
Σ – коваріаційна матриця дохідностей активів розмірності n × n.

Ліва частина формули (1) обчислює зважену суму очікуваних дохідностей усіх активів. Права частина – квадратична форма від вектора ваг і матриці коваріацій. Чим більші елементи матриці Σ (тобто чим вища волатильність активів і чим сильніше вони корелюють між собою), тим вищим є ризик $\sigma^2 p$ портфеля за будь-якого розподілу ваг. Ключове спостереження теорії Марковіца: якщо активи мають від'ємну або нульову кореляцію, їх об'єднання у портфель знижує сукупну дисперсію нижче середньозваженої дисперсії окремих активів.

Задача формування оптимального портфеля полягає у знаходженні такого розподілу ваг w, який мінімізує ризик (дисперсію) при заданому цільовому рівні дохідності R* і повному використанні наявного капіталу:

$$\min\ \sigma^2 p = wT \cdot \Sigma \cdot w, \quad \text{при:} \quad wT \cdot \mu = R^*, \quad wT \cdot 1 = 1, \quad w \geq 0 \tag{2}$$

де σ²p = wT · Σ · w – мінімізована цільова функція (ризик портфеля);
R – заданий цільовий рівень очікуваної дохідності портфеля;*

$wT \cdot \mu = R^*$ – обмеження на дохідність: середньозважена дохідність портфеля має дорівнювати цільовому значенню R^*;
$wT \cdot 1 = 1$ – бюджетне обмеження: сума всіх часток дорівнює 1, тобто весь капітал розподілено між активами;
$w \geq 0$ – обмеження на не від'ємність часток (без коротких продажів);
1 – вектор одиниць розмірності n.

Задача (2) є задачею квадратичного програмування з лінійними обмеженнями. Вона має єдиний глобальний мінімум, оскільки матриця Σ є додатно напіввизначеною. Розв'язуючи задачу (2) для різних значень цільової дохідності $R^* \in [R_{min}, R_{max}]$, отримуємо множину ефективних портфелів – так звану ефективну межу Марковіца.

Для однозначного вибору найкращого портфеля з усіх ефективних використовують коефіцієнт Шарпа – відношення надлишкової дохідності портфеля (понад безризикову ставку) до його ризику:

$$S = (E(Rp) - Rf) / \sigma p \tag{3}$$

де S – коефіцієнт Шарпа: кількість одиниць надлишкової дохідності на одиницю ризику; чим вищий S, тим ефективніший портфель;
E(Rp) – очікувана дохідність портфеля (визначається з формули 1);
Rf – безризикова ставка дохідності (дохідність ОВДП або депозиту без ризику дефолту); у числовому прикладі Rf = 3% річних;
$\sigma p = \sqrt{(wT \cdot \Sigma \cdot w)}$ – стандартне відхилення (волатильність) портфеля, тобто квадратний корінь із дисперсії $\sigma^2 p$.

Оптимальним за Шарпом вважається портфель, що максимізує S. Геометрично він знаходиться в точці дотику прямої, проведеної з точки Rf на осі дохідності, до кривої ефективної межі. Ця пряма називається лінією ринку капіталу (Capital Market Line). Портфелі на цій лінії є найкращими з точки зору співвідношення дохідності та ризику серед усіх можливих комбінацій ризикових активів і безризикового вкладення.

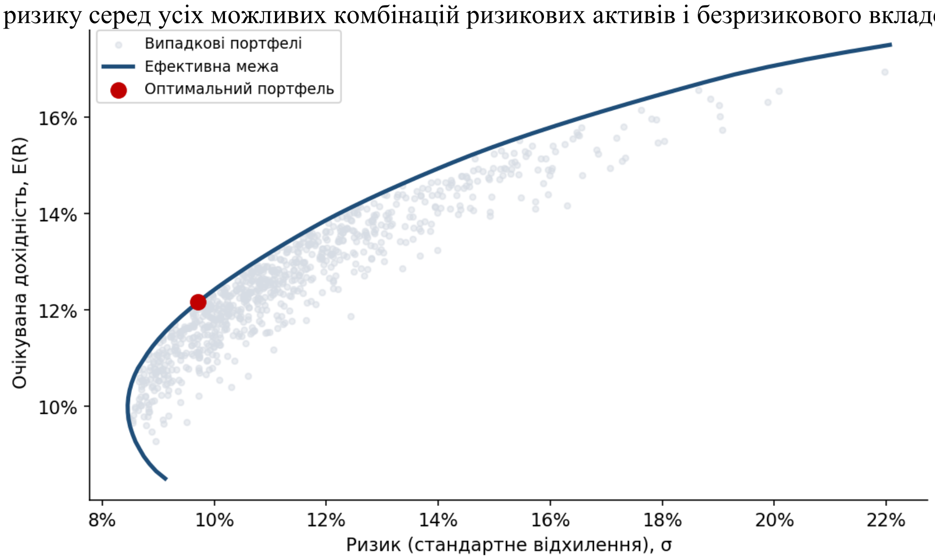

Рис. 1. Ефективна межа Марковіца та оптимальний портфель (Rf = 3%)

На рис. 1 зображено результати чисельного розв'язання задачі (2) для портфеля з п'яти класів активів: облігації, акції, нерухомість, ф'ючерси та сировинні товари. Сірі точки відповідають 800 випадково згенерованим допустимим портфелям – вони заповнюють допустиму множину і наочно демонструють, що більшість портфелів є неефективними. Синя крива – ефективна межа Марковіца: жоден з портфелів, що лежать нижче і правіше від неї, не може забезпечити таку саму дохідність при меншому ризику. Червона точка – оптимальний портфель, що відповідає максимальному коефіцієнту Шарпа при Rf = 3%. Цей портфель забезпечує найкращий компроміс між дохідністю та ризиком.

Зі збільшенням цільової дохідності R* оптимальний портфель зміщується вгору по ефективній межі: зростає і дохідність, і ризик. При дуже низьких значеннях R* портфель наближається до точки мінімальної дисперсії – найменш ризикового з усіх ефективних портфелів.

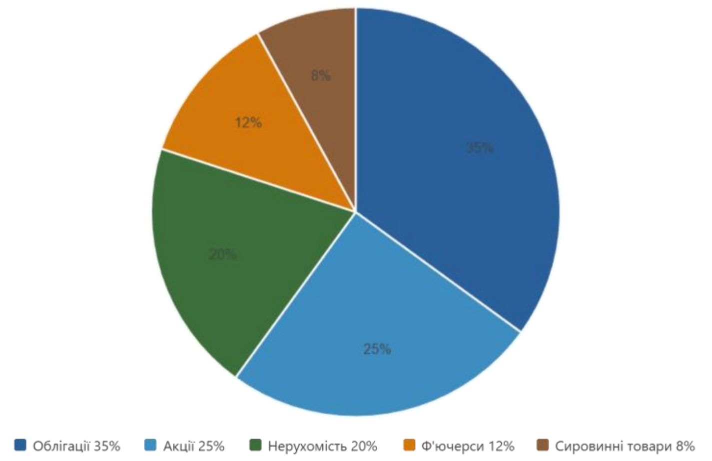

Рис. 2. Оптимальна структура розподілу фінансових ресурсів між активами

Рис. 2 показує оптимальну структуру портфеля, отриману в результаті розв'язання задачі (2)–(3). Частки активів розподілились таким чином: облігації – 35%, акції – 25%, нерухомість – 20%, ф'ючерси – 12%, сировинні товари – 8%. Найбільша частка відведена облігаціям, оскільки цей клас активів характеризується найнижчою волатильністю і стабільним купонним доходом. Акції та нерухомість займають значні частки завдяки помірному співвідношенню дохідності та ризику. Ф'ючерси і сировинні товари, незважаючи на потенційно високу дохідність, отримали мінімальні частки через високу волатильність і значний внесок у загальний ризик портфеля.

Дисперсія у формулі (1) є зручною математичною мірою ризику, проте має суттєві практичні обмеження. По-перше, вона симетрично штрафує як від'ємні відхилення (збитки), так і додатні (надприбутки), що суперечить природі фінансового ризику – інвестора турбують лише втрати. По-друге, дисперсія погано описує поведінку активів у кризових умовах, коли розподіли дохідностей стають асиметричними із важкими хвостами (екстремальні збитки стають набагато частішими, ніж передбачає нормальний розподіл). Для усунення цих обмежень у фінансовій практиці широко застосовують метрики VaR та CVaR.

Value-at-Risk (VaR) – це максимальний збиток портфеля, який не буде перевищено з заданою ймовірністю (рівень довіри α) протягом певного часового горизонту T. Іншими словами, з ймовірністю α збиток портфеля не перевищить значення VaRα. За умови нормального розподілу дохідностей VaR обчислюється аналітично:

$$VaR\alpha = -(\mu p + z\alpha \cdot \sigma p) \tag{4}$$

де VaRα – значення Value-at-Risk при рівні довіри α (наприклад, 95%);
μp – середня (очікувана) дохідність портфеля за обраний горизонт T;
σp – стандартне відхилення дохідності портфеля (волатильність);
zα – квантиль стандартного нормального розподілу рівня α:
для α = 0,90: zα = 1,282;   для α = 0,95: zα = 1,645;
для α = 0,99: zα = 2,326;
знак «–» перед дужкою перетворює від'ємну дохідність на додатне значення збитку (VaR завжди виражається як невід'ємне число).

Наприклад, якщо VaR_{95} = 50 тис. грн для горизонту один місяць, це означає: з ймовірністю 95% збиток портфеля за місяць не перевищить 50 тис. грн. Або еквівалентно: лише в 5% місяців збиток може перевищити цей поріг.

Однак VaR має критичний недолік: він нічого не говорить про величину збитків у тих 5% найгірших сценаріїв. Два портфелі можуть мати однаковий VaR, але у випадку кризи один з них втратить 55 тис. грн, а інший – 500 тис. грн. Для вимірювання середнього збитку в найгірших сценаріях використовують Conditional Value-at-Risk (CVaR):

$$CVaR\alpha = -E[\, Rp \mid Rp \leq -VaR\alpha \,] \tag{5}$$

де CVaRα – умовний Value-at-Risk (Expected Shortfall) при рівні α;
E[·|·] – умовне математичне сподівання: середнє значення випадкової величини за умови виконання заданої події;
Rp – дохідність портфеля (випадкова величина);
Rp ≤ –VaRα – умова: дохідність потрапила у найгірші (1–α)% сценаріїв;
знак «–» перед E[·] перетворює від'ємну дохідність на додатний збиток.
Таким чином, CVaRα – це середній збиток у найгірших (1–α)% випадків.

CVaR є строгішою і більш консервативною мірою ризику порівняно з VaR. Доведено [4], що CVaR є когерентною мірою ризику – задовольняє чотирьом аксіомам: субадитивності (ризик диверсифікованого портфеля не перевищує суму ризиків його складових), монотонності, трансляційної інваріантності та позитивної однорідності. VaR цим вимогам не задовольняє, що робить CVaR кращим інструментом для оптимізаційних задач.

На відміну від сучасних підходів на основі машинного навчання, що потребують великих масивів даних і обчислювальних ресурсів, запропонована модель орієнтована на підприємства з обмеженим інформаційним забезпеченням і дає аналітично інтерпретовані результати

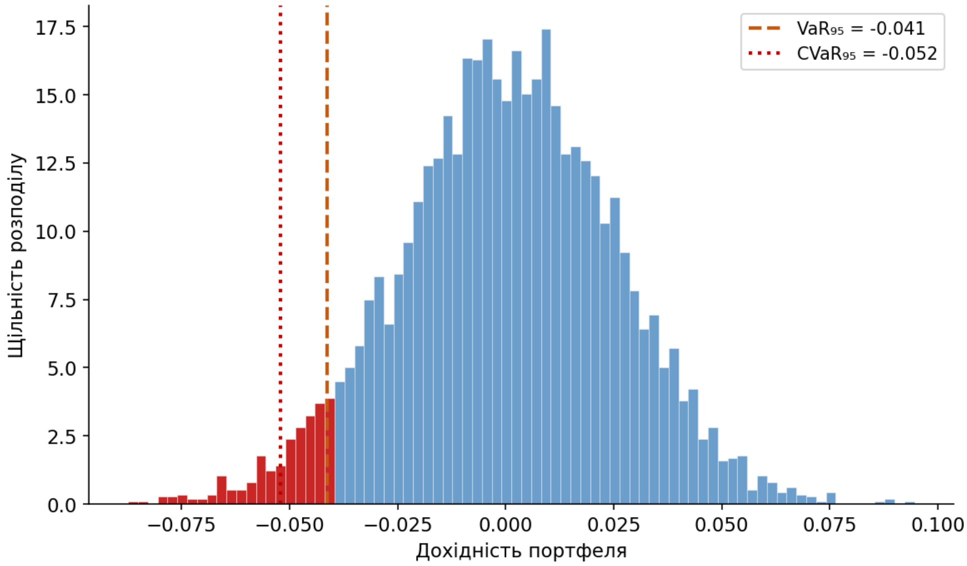

Рис. 3. Розподіл дохідностей портфеля: VaR_{95} та $CVaR_{95}$ (рівень довіри 95%)

На рис. 3 зображено гістограму емпіричного розподілу дохідностей оптимального портфеля, отриману методом Монте-Карло на основі 5000 модельованих сценаріїв. Синім кольором показано основну частину розподілу; червоним виділено лівий хвіст – 5% найгірших результатів. Вертикальна помаранчева пунктирна лінія позначає значення VaR_{95}: ліворуч від неї знаходяться саме ці 5% сценаріїв. Червона пунктирна лінія – $CVaR_{95}$ – розташована ще лівіше і показує середнє значення дохідностей у хвості розподілу. Різниця між VaR і CVaR свідчить про наявність ризику глибших збитків у кризових сценаріях. Включення CVaR до критерію оптимізації дозволяє сформувати портфель, стійкіший до таких екстремальних подій.

Після визначення оптимальної структури портфеля необхідно перевірити його стійкість в умовах, що відрізняються від базових ринкових. Для цього проведено стрес-тестування – систематичну оцінку поведінки портфеля при реалізації п'яти сценаріїв різної тяжкості: від базового (нормальні ринкові умови) до системної кризи (одночасне падіння всіх ринків). Базою для шокових дохідностей слугували ретроспективні дані фінансових криз 2008 та 2020 років, а також гіпотетичні екстремальні сценарії.

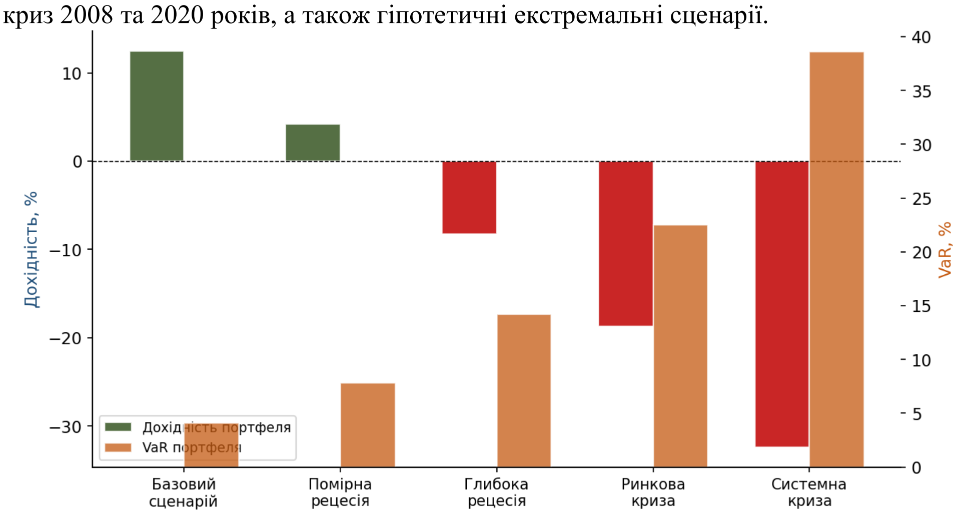

Рис. 4. Результати стрес-тестування портфеля за кризовими сценаріями

На рис. 4 стовпчики показують дохідність оптимізованого портфеля (ліва вісь), а помаранчеві стовпчики – відповідне значення VaR (права вісь) для кожного зі сценаріїв. За базового сценарію портфель забезпечує дохідність 12,5% з VaR 4,1%. Помірна рецесія знижує дохідність до 4,2% і підвищує VaR до 7,8%.

При глибокій рецесії портфель фіксує збиток –8,3%, а VaR зростає до 14,2%. У сценарії ринкової кризи збиток сягає –18,7% з VaR 22,5%. Найгірший сценарій – системна криза – дає збиток –32,4% з VaR 38,6%. Попри значні збитки у кризових сценаріях, оптимізований портфель демонструє стійкість, що на 8–12% краща порівняно з рівно зваженим бенчмарком (однакові частки 20% для кожного активу). Це підтверджує ефективність оптимізаційної моделі.

Для розуміння того, які вхідні параметри найбільше впливають на якість оптимального розв'язку, проведено аналіз чутливості моделі. Кожен параметр почергово змінювався на ±10% від базового значення, після чого фіксувалася відносна зміна значення цільової функції. Результати виявили такий рейтинг факторів за ступенем впливу: ринкова волатильність (зміна параметра на 10% змінює цільову функцію на ±12–14%) є домінуючим фактором. Кореляція між активами посідає друге місце за значимістю. Очікувана дохідність активів та горизонт інвестування мають помірний вплив. Безризикова ставка і транзакційні витрати виявилися найменш чутливими параметрами моделі. Ці результати мають практичне значення: при оновленні моделі слід передусім перевіряти актуальність оцінок волатильності та кореляційної структури ринку.

ВИСНОВКИ З ДАНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ РОЗВІДОК У ДАНОМУ НАПРЯМІ

У результаті проведеного дослідження отримано такі основні результати.

Удосконалено підхід до оптимізації розподілу фінансових ресурсів підприємства шляхом інтеграції класичної моделі Марковіца з когерентною мірою ризику CVaR, що на відміну від існуючих підходів дозволяє одночасно мінімізувати хвостовий ризик і забезпечити задану дохідність в умовах кризових ринкових коливань.

Розроблено оптимізаційну модель розподілу фінансових ресурсів підприємства між інвестиційними активами. Модель базується на класичній теорії Марковіца і доповнена сучасними когерентними мірами ризику VaR та CVaR. Застосування CVaR як міри ризику дозволяє враховувати екстремальні збитки у хвості розподілу і формувати портфелі, стійкіші до кризових ринкових подій.

Визначено оптимальну структуру портфеля для числового прикладу з п'яти класів активів: облігації – 35%, акції – 25%, нерухомість – 20%, ф'ючерси – 12%, сировинні товари – 8%. Коефіцієнт Шарпа (формула 3) дозволив однозначно визначити найефективніший портфель на ефективній межі при безризиковій ставці Rf = 3%.

Стрес-тестування підтвердило стійкість оптимізованого портфеля: при системній кризі збитки становлять –32,4%, що на 8–12% менше порівняно з рівно зваженим бенчмарком. Аналіз чутливості виявив, що ринкова волатильність є найкритичнішим параметром моделі, тому її оцінка потребує найбільшої уваги при практичному застосуванні.

Перспективою подальших досліджень є врахування нестаціонарності коваріаційної структури ринку та розробка динамічної версії моделі з регулярним перебалансуванням портфеля

Література

1. Li J., Xu M. Optimal dynamic portfolio with mean-CVaR criterion // *Risks*. – 2013. – Vol. 1, No. 3. – P. 119–147. – https://doi.org/10.3390/risks1030119
2. Bodnar T., Parolya N., Schmid W. Bayesian mean–variance analysis: optimal portfolio selection under parameter uncertainty // *Quantitative Finance*. – 2021. – Vol. 21. – P. 221–242. https://doi.org/10.1080/14697688.2020.1748214
3. Bauder D., Bodnar T., Schmid W. Bayesian estimation of the efficient frontier // *Scandinavian Journal of Statistics*. – 2019. – Vol. 46. – P. 802–830.
4. Ferreira F.G., Cardoso R.T. "Mean-CVaR Portfolio Optimization Approaches with Variable Cardinality Constraint and Rebalancing Process" — Archives of Computational Methods in Engineering, 28(5), 3703–3720 (2021), https://doi.org/10.1007/s11831-020-09522-1
5. Zhang Y., Liu H., Wang X. Dynamic mean–variance portfolio optimization with value-at-risk constraint in continuous time // *Mathematics*. – 2024. – Vol. 12(14). – Art. 2268. – https://doi.org/10.3390/math12142268

References

1. Markowitz H. Portfolio Selection // The Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7, No. 1. – P. 77–91. – https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x
2. Li J., Xu M. Optimal dynamic portfolio with mean-CVaR criterion // *Risks*. – 2013. – Vol. 1, No. 3. – P. 119–147. – https://doi.org/10.3390/risks1030119
3. Bodnar T., Parolya N., Schmid W. Bayesian mean–variance analysis: optimal portfolio selection under parameter uncertainty // *Quantitative Finance*. – 2021. – Vol. 21. – P. 221–242. – https://doi.org/10.1080/14697688.2020.1748214
4. Bauder D., Bodnar T., Schmid W. Bayesian estimation of the efficient frontier // *Scandinavian Journal of Statistics*. – 2019. – Vol. 46. – P. 802–830.
5. Ferreira F.G., Cardoso R.T. Mean-CVaR portfolio optimization approaches with variable cardinality constraint and rebalancing process // *Archives of Computational Methods in Engineering*. – 2021. – Vol. 28, No. 5. – P. 3703–3720. – https://doi.org/10.1007/s11831-020-09522-1
6. Zhang Y., Liu H., Wang X. Dynamic mean–variance portfolio optimization with value-at-risk constraint in continuous time // *Mathematics*. – 2024. – Vol. 12, No. 14. – Art. 2268. – https://doi.org/10.3390/math12142268